DS – MPSI – Mécanique – 1h30
À propos de l'atome d'hydrogène

On étudie dans ce problème le mouvement d'un électron assimilé à un point matériel M de masse m_e, de charge $-e$, dans un atome d'hydrogène ^1_ZH. On notera r la distance entre l'électron et le noyau O, et θ l'angle repérant l'électron dans la base polaire centrée sur le noyau. On donne :

- Masse d'un proton : $m_p = 1,7.10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}$ J · s
- Énergie d'un photon de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
- Constante gravitationnelle : $\mathscr{G} = 6,7.10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

1. Quel est le numéro atomique Z de l'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

Forces mises en jeu

2. La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour norme $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ? Cette force est-elle Newtonienne ?
3. Exprimer la norme de l'interaction gravitationnelle F_g subie par l'électron par le noyau. On notera G la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?
4. Calculer un ordre de grandeur du rapport F_g/F_e. En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.
5. Placer sur un schéma représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique $\vec{F_e}$ qui s'exerce sur l'électron et la base vectorielle adaptée à l'étude de son mouvement.

Nature du mouvement

Dans cette question, on ne fait pas d'hypothèse sur la nature du mouvement de l'électron autour du noyau.

6. Déterminer le moment en O de la force électrostatique sur l'électron.
7. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de l'électron en O se conserve au cours du mouvement.
8. Montrer que l'énergie mécanique E_m se conserve au cours du mouvement.
9. Donner l'expression générale du vecteur vitesse de l'électron dans la base polaire, sans faire d'hypothèse sur la nature de sa trajectoire.
10. En déduire une expression de la norme L du moment cinétique en fonction de r et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, et de m_e.
11. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir E_p telle que $E_p(r \to \infty) = 0$).
12. En déduire que l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r)$ que l'on exprimera en fonction de r, L, ϵ_0, e et m_e.
13. Justifier que $E_m \geq E_{p,eff}$.
14. Discuter de la nature de la trajectoire selon le signe de E_m. On pourra s'appuyer sur une interprétation graphique de la fonction $E_{p,eff}(r)$. Quelle(s) trajectoire(s) vous semble(nt) physiquement viable(s) ?

Modèle planétaire de l'atome

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon r, autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

15. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

16. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron E_c en fonction de ϵ_0, e et r.

17. Montrer que l'énergie mécanique E_m de l'électron s'exprime sous la forme $E_m = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$.
    Commenter le signe.

Modèle de Bohr

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons r_n obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) : $L = n\hbar$ où $\hbar$ est la constante de Planck réduite égale à $h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}$ J.s et n un entier naturel non nul.

18. Exprimer la norme du moment cinétique L en fonction de m_e, r_n et de sa vitesse v_n sur le cercle de rayon r_n.

19. En déduire l'expression de r_n en fonction des constantes ϵ_0, e, $\hbar$, m_e et n., puis en fonction de r_1 et n.

20. Déterminer l'expression de E_n, énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon r_n. En déduire que E_n est de la forme $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ où l'on exprimera E_1 en fonction des constantes introduites.

21. Calculer r_1 puis calculer E_1 en joule et en électronvolt.

Stabilité de la matière

22. Dans cette question on considère que l'électron peut se trouver sur n'importe quelle orbite circulaire de rayon r. On montrera l'année prochaine que toute particule chargée accélérée émet de l'énergie sous forme d'onde électromagnétique. Cette puissance perdue par l'électron s'écrit :

$$P(r) = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3},$$

    avec ω la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière.

    (a) Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme $P(r) = P_0/r^4$, où P_0 est une constante que l'on déterminera, puis en déduire que :

$$r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{P_0}{A}, \quad \text{ou } A \text{ est une constante a determiner.}$$

    (b) Si, à $t = 0$, l'électron est sur sur une orbite de rayon $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer temps t_f par l'électron à atteindre le noyau. Est-ce physiquement acceptable ?

MPSI	Physique - DS n°7 Thermodynamique Durée 2h30	08/04/23

Les calculatrices sont **AUTORISÉES**.

***

Chaque exercice est indépendant.

***

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction, de l'orthographe et de la clarté des explications demandées.

Donnée générale de l'énoncé : constante du gaz parfait $R = 8{,}31\, J\,.\,K^{-1}.mol^{-1}$

I. Études de transformations d'un gaz parfait

On étudie différentes transformations de n moles d'un gaz parfait.

On notera P la pression du gaz, V son volume et T sa température.

Soit C_{Vm} la capacité calorifique molaire à volume constant du gaz. C_{Vm} est supposée constante.

Soit C_{Pm} la capacité calorifique molaire à pression constante du gaz. C_{Pm} est supposée constante.

Soit γ le rapport des capacités calorifiques molaires à pression constante et à volume constant.

Chaque partie de cet exercice est indépendante.

A – Généralités

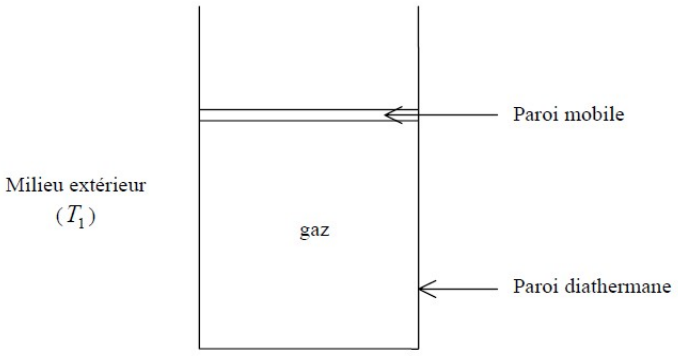
1. Rappeler la formulation du premier principe de la thermodynamique pour un système thermodynamique au repos macroscopique dans le cas d'une transformation d'un état initial I vers un état final F. Préciser les noms des termes utilisés.

   Que devient cette relation dans le cas particulier d'une transformation monobare où le système est en équilibre mécanique initial et final ? Préciser les noms des termes utilisés.

   Donner l'expression du travail des forces de pression. Préciser les termes utilisés.
2. Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.
3. Établir la relation de Mayer qui relie les capacités thermiques molaires C_{Vm} et C_{Pm} et la constante des gaz parfaits R. En déduire les expressions de C_{Vm} et C_{Pm} en fonction de γ et R.
4. Donner les expressions des variations d'énergie interne ΔU et d'enthalpie ΔH de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque.

B – Détente isotherme

On enferme le gaz parfait dans une enceinte diathermane dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, peut se déplacer verticalement sans frottement.



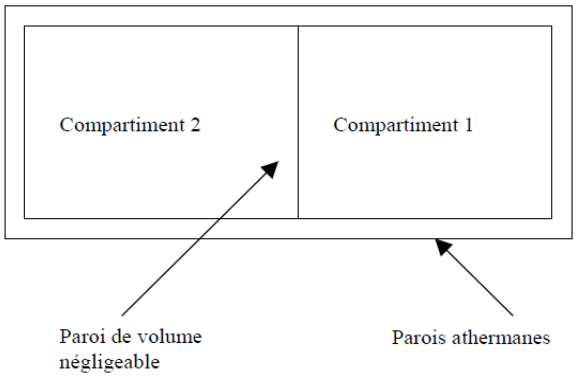
L'extérieur se comporte comme un thermostat de température T_1 constante.

À l'état initial, le gaz est caractérisé par une pression P_1, un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée. On débloque la paroi et on la déplace de manière **très lente** jusqu'à une position telle que le volume V_1' offert au gaz soit $V_1'=2V_1$, et on la bloque à nouveau.

5. Déterminer la pression P_1' du gaz dans l'état final en fonction de P_1.
6. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n, R et T_1.
7. Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n, R et T_1.

C – Détente de Joule Gay-Lussac

On considère un cylindre indéformable à parois athermanes divisé intérieurement en deux compartiments de volumes identiques par une paroi interne de volume négligeable. Les n moles de gaz parfait se trouvent dans le compartiment 1, le compartiment 2 étant vide.



À l'état initial, le gaz est caractérisé par une pression P_2, une température T_2 et occupe un volume V_2.

On ôte alors la paroi interne et le gaz parfait occupe la totalité du cylindre. L'enlèvement de la paroi se fait sans travail.

8. Montrer que la variation d'énergie interne ΔU_2 du gaz au cours de cette transformation est nulle.
9. En déduire, dans l'état final, la température T_2' en fonction de T_2 puis la pression P_2' en fonction de P_2.
10. On considère, uniquement pour cette question, le cas d'un gaz réel. Quelle est la différence qui existe, lors d'une détente de Joule Gay-Lussac, entre le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz réel ?

D – Compression et détente rapides

Le gaz est cette fois enfermé dans un cylindre vertical calorifugé comportant un piston mobile (les frottement sont négligés) calorifugé de section $S=80{,}0\,cm^2$ en contact avec une atmosphère extérieure de pression constante $P_0=1{,}00\,\text{bar}$. Initialement, le gaz est dans l'état d'équilibre (0) et sa température vaut $T_0=293\,K$. L'accélération de la pesanteur est $g=9{,}81\,m.s^{-2}$.

11. On pose sur le piston une masse $m=40{,}0\,kg$ et on laisse le système évoluer jusqu'à ce que le gaz retrouve un état d'équilibre (1) de pression P_1 et de température T_1.
    a) Exprimer P_1 en fonction de m, g, S et P_0. Faire l'application numérique.
    b) Exprimer T_1 en fonction de T_0, m, g, S, P_0 et du coefficient γ du gaz. Faire l'application numérique avec $\gamma=1{,}40$.

12. Le gaz est dans l'état (1). On enlève rapidement la masse m et on laisse le système évoluer jusqu'à ce que le gaz retrouve un état d'équilibre (2) de pression P_2 et de température T_2.

    a) Exprimer P_2 en fonction de P_0.

    b) Exprimer T_2 en fonction de T_1, P_0, P_1 et du coefficient γ du gaz. Faire l'application numérique avec $\gamma = 1{,}40$.

    c) En raisonnant sur l'énergie interne du système, proposer une explication simple du fait que T_2 est supérieure à T_0.

E – Transformation cyclique d'un gaz parfait

Une quantité de matière $n = 1{,}00\,mol$ de gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}40$ subit le cycle de transformations suivant :

- De A à B, une détente isotherme très lente,
- De B à C, une transformation isochore,
- De C à A, le retour à l'état initial par une transformation isobare très lente (et monobare).

Données : constante R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1} ; $T_A = T_B = 293$ K ; $V_A = 12{,}5$ L ; $V_B = 50{,}0$ L

13. Représenter dans un diagramme PV le cycle de transformations subies par le gaz.
14. Calculer les valeurs prises par les paramètres thermodynamiques T_i, P_i et V_i aux trois points i = A, B et C. On regroupera les valeurs dans un tableau.
15. Calculer les valeurs du travail et du transfert thermique reçus par le gaz au cours de chaque étape du cycle : W_{AB}, Q_{AB}, W_{BC}, Q_{BC}, W_{CA}, Q_{CA}.
16. Calculer les valeurs du travail W_{cycle} et du transfert thermique Q_{cycle} reçus par le gaz au cours d'un cycle. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.
17. Que vaut la variation d'énergie interne ΔU_{cycle} du gaz au cours d'un cycle ? Justifier.

II. Détente isotherme d'un mélange de deux corps purs

Un système fermé de volume V variable subit une transformation isotherme très lente au contact d'un thermostat de température constante $T_0 = 333\,K$. Le système est constitué d'un mélange de deux corps purs : diazote N_2 et eau H_2O.

Hypothèses:

- le diazote N_2 demeure à l'état gazeux ;
- la phase gaz, constituée de diazote et de vapeur d'eau, se comporte comme un mélange idéal de gaz parfaits ayant pour pression totale : $P_{tot} = P_{N_2} + P_{H_2O}$ où P_{N_2} et P_{H_2O} sont les pressions partielles de diazote et de vapeur d'eau ;
- le volume de la phase liquide (seulement composée d'eau) est négligé devant le volume de la phase vapeur.

Données :

- $P_{sat}(T_0 = 333\,K) = 2{,}00.10^4\,Pa$: pression de vapeur saturante de l'eau à T_0 ;
- On rappelle que pour un mélange idéal de N gaz parfaits i ($i = 1, 2, \ldots, N$) de quantité de matière n_i, la pression partielle P_i du gaz i est la pression de ce gaz s'il était seul dans l'enceinte et est donnée par : $P_i = x_i^{mol} P_{tot}$ où $x_i^{mol} = \dfrac{n_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}$ est la fraction molaire du gaz i et $P_{tot} = \sum_{i=1}^{N} P_i$ est la pression totale.

A – Corps pur eau (sans diazote)

Une quantité $n_E = 3{,}00.10^{-1}\,mol$ d'eau pure (sans diazote) est envisagée, à $T_0 = 333\,K$, à l'état de vapeur saturante : état (0).

1. Donner la pression $P_{E,0}$ de l'eau correspondant à cet état d'équilibre.
2. En déduire la valeur numérique en litres du volume V_0 occupé par l'eau dans ces conditions.
3. Donner l'allure générale des diagrammes pression-température et de Clapeyron de l'eau. Positionner le point représentatif du corps pur, dans l' état (0), sur chacun des deux diagrammes.
4. Le volume du système est, depuis l'état (0), réduit de moitié ($V_{final} = V_0/2$) à température $T_0 = 333\,K$ constante et de manière très lente (équilibre entre le système et le milieu extérieur à tout instant). Calculer la valeur du titre massique x_{final} en vapeur d'eau à l'état final. Positionner le point représentatif du corps pur, dans cet état final, sur chacun des deux diagrammes de la question 3. .

   Exprimer le travail W reçu par le corps pur eau au cours de cette transformation en fonction de $P_{sat}(T_0)$ et V_0. Faire l'application numérique.

B – Transformation d'un mélange diazote-eau

B.1 – État initial de la transformation

À la quantité $n_E = 3{,}00.10^{-1}\,mol$ d'eau précédente est ajoutée la quantité $n_N = 1{,}00.10^{-1}\,mol$ de diazote N_2. La pression totale initiale du mélange est $P_{tot,1} = 3{,}00.10^4\,Pa$, pour un nouveau volume V_1 : état (1).

5. Quelle inégalité devrait vérifier la pression partielle de l'eau si celle-ci était sous forme de vapeur sèche ? Montrer que, dans l'état (1), l'eau est sous forme de vapeur saturante (on pourra admettre ce résultat pour continuer l'exercice).
6. Déterminer la valeur de la pression partielle $P_{N_2,1}$ du diazote N_2 dans cet état initial.

7. En déduire la valeur en litres du volume initial V_1 du mélange.
8. Calculer les valeurs des quantités de matière $n_{E,liq,1}$ et $n_{E,vap,1}$ de l'eau sous forme liquide et vapeur dans l' état (1).

B.2 – État final de la transformation

Le mélange subit une détente isotherme et très lente (équilibre entre le système et le milieu extérieur à tout instant) jusqu'à l' état (2) pour lequel la pression totale est $P_{tot,2}=2{,}00.10^4 Pa$.

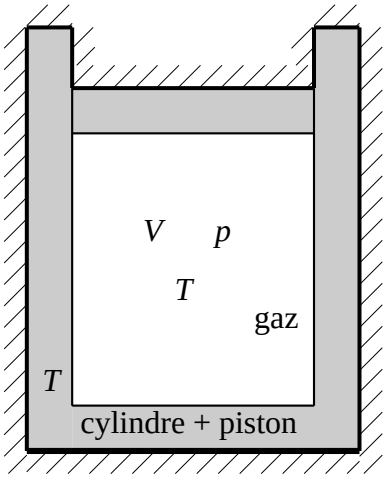
9. Déterminer si, dans l' état (2), l'eau est sous forme de vapeur sèche ou de vapeur saturante.
10. Calculer la valeur de la pression partielle $P_{N,2}$ du diazote dans cet état final (2).
11. En déduire la valeur en litres du volume final V_2 du mélange.
12. Calculer les valeurs des quantités de matière $n_{E,liq,2}$ et $n_{E,vap,2}$ de l'eau sous forme liquide et vapeur dans l' état (2).

III. Transformation polytropique

Une quantité de matière $n = 1{,}00\,mol$ de gaz parfait de capacité thermique molaire à volume constant C_{Vm} constante est contenue dans un cylindre fermé par un piston pouvant se déplacer sans frottement. Un opérateur déplace très lentement le piston de telle sorte que l'équilibre entre le système et le milieu extérieur soit vérifié à tout instant au cours de la transformation.

Les surfaces extérieures du cylindre et du piston sont parfaitement calorifugées. En revanche, on suppose parfait le contact thermique entre leurs surfaces intérieures et le gaz, de telle sorte que les températures du gaz, du cylindre et du piston restent toujours égales et notées T.

On se propose d'étudier l'influence de la capacité thermique C de l'ensemble {cylindre + piston} sur les transformations du gaz.



1. On considère une transformation infinitésimale du système {gaz + cylindre + piston} lors de laquelle la température passe de T à $T+dT$, la pression du gaz passe de p à $p+dp$ et le volume du gaz passe de V à $V+dV$.
   a) Montrer, en justifiant, que : $\left(C+nC_{Vm}\right)dT + p\,dV = 0$
   b) En utilisant l'équation d'état du gaz parfait à l'état final, établir une relation entre p, V, dp, dV, dT, n et R. On négligera les termes d'ordre 2.
   c) En déduire la relation : $k\dfrac{dV}{V} + \dfrac{dp}{p} = 0$ où k est une constante que l'on exprimera en fonction de C, de n, de C_{Vm} et de la capacité thermique molaire à pression constante C_{pm} du gaz parfait puis en fonction de n, C, R et du coefficient γ du gaz.
2. Le système subit une transformation d'un état initial 1 (p_1, T_1, V_1) vers un état final 2 (p_2, T_2, V_2). Montrer, à partir du résultat précédent, que : $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$ (une transformation pour laquelle cette relation est vérifiée est dite « polytropique de coefficient k »).
3. Dans cette question, on suppose $C \to \infty$ donc l'ensemble {cylindre + piston} est considéré comme un thermostat. Comment peut-on qualifier la transformation subie par le gaz ? Comment la constante k se simplifie-t-elle ? Que devient la relation de la question 2. entre p_1, V_1, p_2, V_2.
4. Dans cette question, on suppose $C \to 0$ donc le gaz est en contact direct avec les parois extérieures calorifugées du cylindre et du piston. Comment peut-on qualifier la transformation subie par le gaz ? Comment la constante k se simplifie-t-elle ? Que devient la relation de la question 2. entre p_1, V_1, p_2, V_2.
5. Dans cette question, on suppose que $k = 1{,}30$. On donne l'état initial ($p_1 = 1{,}00$ bar , $T_1 = 20{,}0\,°C$), la pression finale $p_2 = 10{,}0$ bar et le coefficient $\gamma = 1{,}40$ du gaz. Le système étudié est le gaz.
   a) Calculer le volume V_1 du gaz dans l'état initial.
   b) Établir l'expression de la température T_2 en fonction de T_1, p_1, p_2 et k. Faire l'application numérique. Calculer le volume V_2 du gaz dans l'état final.
   c) La relation établie à la question 2. peut également s'écrire : $p_1 V_1^k = p V^k = p_2 V_2^k$ où p et V sont les pression et volume du gaz au cours de la transformation. Montrer que le travail reçu par le gaz lors de la transformation est donné par : $W = \dfrac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{k-1}$. Faire l'application numérique.
   d) En déduire l'expression du transfert thermique Q reçu par le gaz en fonction de p_1, V_1, p_2, V_2, k et γ. Faire l'application numérique.
   e) Que devient l'expression du transfert thermique dans le cas de la question 4. où $C \to 0$?

DS – MPSI – Mécanique – 1h30
À propos de l'atome d'hydrogène

On étudie dans ce problème le mouvement d'un électron assimilé à un point matériel M de masse m_e, de charge $-e$, dans un atome d'hydrogène ${}^1_Z H$. On notera r la distance entre l'électron et le noyau O, et θ l'angle repérant l'électron dans la base polaire centrée sur le noyau. On donne :

- Masse d'un proton : $m_p = 1,7.10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- Énergie d'un photon de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
- Constante gravitationnelle : $\mathscr{G} = 6,7.10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

1. Quel est le numéro atomique Z de l'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

> ***Solution :*** *Le numéro atomique de l'hydrogène est $Z = 1$. Il est constitué d'un électron et d'un proton.*

Forces mises en jeu

2. La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour norme $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ? Cette force est-elle Newtonienne ?

> ***Solution :*** *L'interaction électrostatique est une force Newtonienne car de norme en $1/r^2$. Elle peut être répulsive si les charges en intéractions sont de même signe.*

3. Exprimer la norme de l'interaction gravitationnelle F_g subie par l'électron par le noyau. On notera G la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?

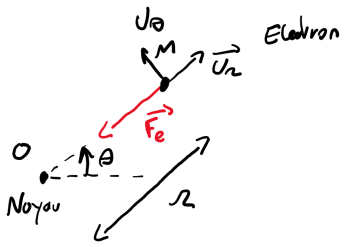
> ***Solution :*** *$F_g = Gm_e m_p/r^2$. Cette force est toujours attractive.*

4. Calculer un ordre de grandeur du rapport F_g/F_e. En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.

> ***Solution :*** *On a*
> $$\frac{F_g}{F_e} = \frac{4\pi G m_e m_p \epsilon_0}{e^2} \simeq 10^{-40}$$
> *donc la force de gravitation est très clairement négligeable devant la force électrostatique.*

5. Placer sur un schéma représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique $\vec{F_e}$ qui s'exerce sur l'électron et la base vectorielle adaptée à l'étude de son mouvement.

Solution :



Nature du mouvement

Dans cette question, on ne fait pas d'hypothèse sur la nature du mouvement de l'électron autour du noyau.

6. Déterminer le moment en O de la force électrostatique sur l'électron.

Solution : $\vec{M}_O(\vec{F}_e) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_e = \vec{0}$ *il s'agit d'une force centrale.*

7. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de l'électron en O se conserve au cours du mouvement.

Solution : *Par application du théorème du moment cinétique*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O(\vec{F}_e) = \vec{0}$$

donc le moment cinétique est une constante du mouvement.

8. Montrer que l'énergie mécanique E_m se conserve au cours du mouvement.

Solution : *Par application du théorème de l'énergie mécanique, il n'y a ici pas de force qui soient non-conservatives*

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P_{nc} = 0$$

donc l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

9. Donner l'expression générale du vecteur vitesse de l'électron dans la base polaire, sans faire d'hypothèse sur la nature de sa trajectoire.

Solution : *A priori* $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

10. En déduire une expression de la norme L du moment cinétique en fonction de r et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, et de m_e.

Solution : *Par définition* $\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m_e\vec{v} = m_e r^2\dot{\theta}\vec{u}$ *soit en norme* $L = m_e r^2\dot{\theta}$.

11. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir E_p telle que $E_p(r \to \infty) = 0$).

Solution : *La force électrostatique est une force conservative centrale donc*

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = -\vec{F}_e$$

donc par intégration, en posant la constante d'intégration telle que E_p *s'annule à l'infini on a*

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

12. En déduire que l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r)$ que l'on exprimera en fonction de r, L, ϵ_0, e et m_e.

Solution : *On écrit l'énergie mécanique*

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m_e r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

13. Justifier que $E_m \geq E_{p,eff}$.

Solution : *Le premier terme étant strictement positif, il va de soi que cette inégalité est vérifiée.*

14. Discuter de la nature de la trajectoire selon le signe de E_m. On pourra s'appuyer sur une interprétation graphique de la fonction $E_{p,eff}(r)$. Quelle(s) trajectoire(s) vous semble(nt) physiquement viable(s) ?

Solution : *Si* $E_m \geq 0$*, le mouvement est non-borné est l'électron décrit un arc d'hyperbole (*$E_m > 0$*) ou de parabole (*$E_m = 0$*). A l'inverse, si* $E_m < 0$*, la trajectoire de l'électron est bornée et alors la trajectoire est une ellipse, ou un cercle si* $E_m = \min(E_{p,eff})$.

L'hydrogène est stable, donc l'électron dans ce modèle classique décrit nécessairement une trajectoire bornée. De plus, par symétrie de révolution du problème, il n'y a aucune raison pour que l'électron décrive une trajectoire elliptique. Finalement, la seule trajectoire qui puisse être réaliste dans ce modèle classique est la trajectoire circulaire.

Modèle planétaire de l'atome

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon r, autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

15. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

> ***Solution :*** *On se place de le repère de Frenet et alors l'accélération est donnée par* $\vec{a} = -r\mathrm{d}ot\theta\vec{u}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$ *avec* $v = r\dot{\theta}$*. L'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au noyau, supposé galiléen donne alors*
>
> $$-m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$
>
> *soit* $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = cte$ *donc le mouvement est uniforme.*

16. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron E_c en fonction de ϵ_0, e et r.

> ***Solution :*** *On remplace et* $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

17. Montrer que l'énergie mécanique E_m de l'électron s'exprime sous la forme $E_m = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$. Commenter le signe.

> ***Solution :*** *On remplace et alors*
>
> $$E_m = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$
>
> *de signe négatif, traduisant une trajectoire bornée (en l'occurence circulaire.)*

Modèle de Bohr

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons r_n obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) : $L = n\hbar$ où $\hbar$ est la constante de Planck réduite égale à $h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}$ J.s et n un entier naturel non nul.

18. Exprimer la norme du moment cinétique L en fonction de m_e, r_n et de sa vitesse v_n sur le cercle de rayon r_n.

> ***Solution :*** *On a* $L = n\hbar = m_e r_n v_n$.

19. En déduire l'expression de r_n en fonction des constantes ϵ_0, e, $\hbar$, m_e et n., puis en fonction de r_1 et n.

Solution : *On utilise la précédente expression de* $v_n = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}}$ *et alors*

$$n\hbar = m_e\sqrt{r_n\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

soit

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e}n^2$$

20. Déterminer l'expression de E_n, énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon r_n. En déduire que E_n est de la forme $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ où l'on exprimera E_1 en fonction des constantes introduites.

Solution : *On remplace dans l'expression de l'énergie mécanique*

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{m_e}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

21. Calculer r_1 puis calculer E_1 en joule et en électronvolt.

Solution : *On trouve* $r_1 = 0.5\,nm$ *et* $E_1 = -13,6\ eV$.

Stabilité de la matière

22. Dans cette question on considère que l'électron peut se trouver sur n'importe quelle orbite circulaire de rayon r. On montrera l'année prochaine que toute particule chargée accélérée émet de l'énergie sous forme d'onde électromagnétique. Cette puissance perdue par l'électron s'écrit :

$$P(r) = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3},$$

avec ω la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière.

(a) Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme $P(r) = P_0/r^4$, où P_0 est une constante que l'on déterminera, puis en déduire que :

$$r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{P_0}{A}, \quad \text{ou } A \text{ est une constante a determiner.}$$

Solution : *On utilise simplement le fait que la vitesse étant orthoradiale, elle s'écrit* $v = r\dot{\theta} = r\omega$*, ce qui donne :*

$$\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}}.$$

On injecte ensuite dans la formule donnée :

$$P(r) = \frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} r^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}\right)^2 = \frac{1}{3m_e^2 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3 \frac{1}{r^4} = \frac{P_0}{r^4} \text{ avec } P_0 = \frac{e^6}{192(\pi\varepsilon_0 c)^3 m_e^2}$$

Le théorème de l'énergie mécanique (appliqué dans un référentiel galiléen) nous dit alors que :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -P \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{P_0}{r^4} \quad \Rightarrow \quad r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{P_0}{A} \text{ avec } A = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}.$$

(b) Si, à $t = 0$, l'électron est sur sur une orbite de rayon $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer temps t_f par l'électron à atteindre le noyau. Est-ce physiquement acceptable ?

Solution : *On intègre facilement cette équation entre* $\{t = 0, r = R\}$ *et* $\{t = t_f, r = 0\}$ *:*

$$Ar^2\mathrm{d}r = P_0\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; A\int_R^0 r^2\mathrm{d}r = P_0\int_0^{t_f}\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; -\frac{A}{3}R^3 = P_0 t_f \;\Rightarrow\; t_f = -\frac{A}{3P_0}R^3 \simeq 2,1\cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Le noyau atomique n'est donc absolument pas stable : si l'on considère, pour se mettre dans la peau d'un physicien de l'époque, que l'univers, et les atomes dont est constituée la matière, a été créé il y a longtemps, les noyaux d'Hydrogène (et sans doute, assez vite, les autres), se seraient détruits très rapidement, moins d'un milliardième de secondes après la création du monde. Ce modèle n'est donc pas réaliste.

Études de transformations d'un gaz parfait

A- généralités

1- $\boxed{\Delta U = W + Q}$

ΔU : Variation d'énergie interne

W : Travail reçu

Q : Transfert thermique (ou chaleur) reçu(e)

Pour une transformation monobare : $\boxed{\Delta H = W_u + Q}$

ΔH : variation d'enthalpie

W_u : Travail utile : autre que celui des forces de pression.

Travail des forces de pression : $\boxed{W = -\int_I^F p_{ext}\, dV}$

V : volume du système.

p_{ext} : pression extérieure.

2- Équation d'état du gaz parfait : $\boxed{PV = nRT}$

P : Pa, V : m^3, n : mol, R : $J.K^{-1}.mol^{-1}$, T : K

3- $H = U + pV$ avec $PV = nRT$ et $H(T)$ et $U(T)$

donc $H(T) = U(T) + nRT$

Par définition : $C_p = \frac{dH}{dT}$ donc $C_p = \underbrace{\frac{dU}{dT}}_{=C_v} + nR$

$\Leftrightarrow C_p = C_v + nR$

$\Leftrightarrow \boxed{C_{pm} = C_{vm} + R}$

On a $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ donc $C_{pm} = \gamma C_{vm}$

Ainsi $C_{pm} = C_{vm} + R \Leftrightarrow \gamma C_{vm} = C_{vm} + R \Leftrightarrow \boxed{C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}}$

et $\boxed{C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}}$

4- $\boxed{\Delta U = C_v \Delta T}$ et $\boxed{\Delta H = C_p \Delta T}$

B. Détente isotherme

5. À l'état final : température $T_1' = T_1$ (équilibre thermique avec le thermostat)

volume $V_1' = 2V_1$

Donc $P_1'V_1' = nRT_1' \iff P_1' = \dfrac{nRT_1}{2V_1} \iff \boxed{P_1' = \dfrac{P_1}{2}}$

6. $W_1 = -\displaystyle\int_{V_1}^{V_1'} P_{ext}\, dV = -\int_{V_1}^{V_1'} P\, dV = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_1'} \frac{dV}{V}$

d'où $W_1 = -nRT_1 \ln\left(\dfrac{V_1'}{V_1}\right) \iff \boxed{W_1 = -nRT_1 \ln(2)}$

7. $\boxed{\Delta U_1 = C_v (\underset{T_1}{\underset{\shortparallel}{T_1'}} - T_1) = 0}$

1er principe : $\Delta U_1 = W_1 + Q_1$ donc $Q_1 = -W_1$

$\iff \boxed{Q_1 = nRT_1 \ln(2)}$

C. Détente de Joule-Gay-Lussac

8. $\Sigma = \{$ gg + vide initial $\}$ → transformation isochore et adiabatique

donc $\Delta U_\Sigma = W + Q = 0$

Or $\Delta U_\Sigma = \underset{\text{gg}}{\underset{\uparrow}{\Delta U_2}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\Delta U_{vide}}}$ ⇒ on a donc : $\boxed{\Delta U_2 = 0}$

9. $\Delta U_2 = C_v (T_2' - T_2) = 0$ donc $\boxed{T_2' = T_2}$

À l'état final : $V_2' = 2V_2$ et $P_2'V_2' = nRT_2'$

$\iff P_2' = \dfrac{nRT_2}{2V_2}$

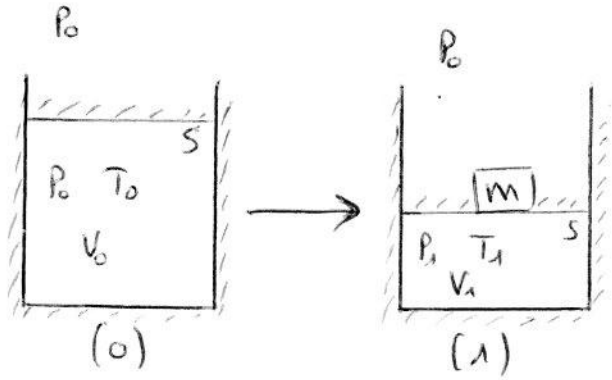
$\iff \boxed{P_2' = \dfrac{P_2}{2}}$

10. gaz réel : $\boxed{\Delta U = 0}$

mais $U(T,V)$ donc, comme V varie, T doit varier aussi ⇒ $\boxed{T_2' \neq T_2}$

D. Compression et détente rapides

1.



a) Piston à l'équilibre $\Rightarrow$ $0 = mg + P_0 S - P_1 S$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

AN : $\underline{P_1 = 1{,}49 \text{ bar}}$

b) 1er principe : $\Delta U = W + Q$

avec $\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$; $W = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)(V_1 - V_0)$

et $Q = 0$ (adiabatique)

donc $\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)(V_1 - V_0)$ (*)

De plus $P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{P_0 + \frac{mg}{S}}$

$P_0 V_0 = nRT_0 \Rightarrow V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$

Ainsi, (*) devient : $\frac{\cancel{nR}}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{\cancel{nR}T_1}{P_0 + \frac{mg}{S}} - \frac{\cancel{nR}T_0}{P_0}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{\gamma-1} - \frac{T_0}{\gamma-1} = -T_1 + \frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{P_0} T_0$$

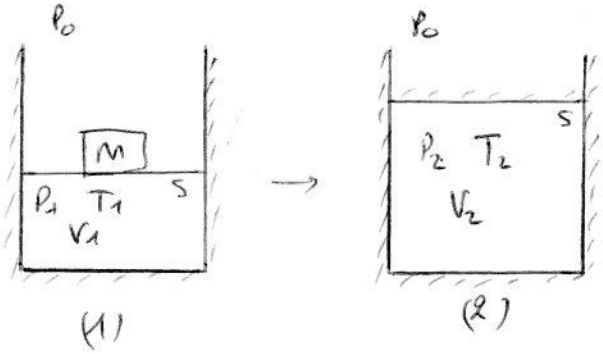
$$\Leftrightarrow T_1 \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right)}_{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{P_0}\right) T_0$$

$$\Leftrightarrow T_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{P_0}\right) T_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_1 = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{P_0}\right) T_0}$$

AN : $\underline{T_1 = 334 \text{ K}}$

2.



a) En (2) : $\boxed{P_2 = P_0}$ (équilibre mécanique)

$\underline{P_2 = 1{,}00 \text{ bar}}$

b) 1er principe : $\Delta U = W + Q$

avec $\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$; $W = -p_0(V_2 - V_1)$

et $Q = 0$

donc $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -p_0(V_2 - V_1)$

avec $V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_2}{P_0}$ et $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$

d'où $\frac{\cancel{nR}}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -\cancel{nR}T_2 + \cancel{nR}T_1 \frac{P_0}{P_1}$

$\Leftrightarrow T_2 \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right)}_{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{P_0}{P_1}\right) T_1$

$\Leftrightarrow \boxed{T_2 = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{P_0}{P_1}\right) T_1}$

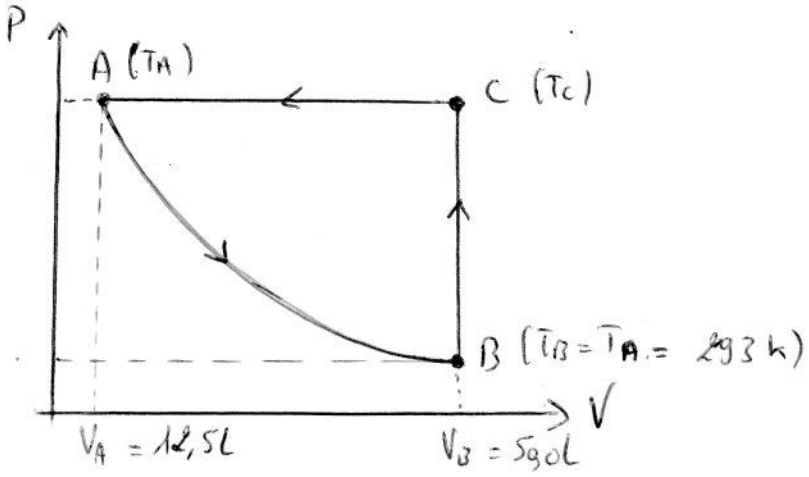
AN : $\underline{T_2 = 303 \text{ K}}$

c) On trouve $T_2 > T_0$: * de (0) à (1), la masse m fournit du travail au gaz ce qui augmente son énergie interne $U_1 > U_0$ (ie $T_1 > T_0$)

* de (1) à (2), le gaz soulève le piston sans masse, il "dépense" donc une énergie moindre que celle qu'il a gagné à l'étape (0)→(1) donc $U_2 > U_0$ i.e $T_2 > T_0$

E. Transformation cyclique d'un gaz parfait

13.



14.

	T (K)	P (bar)	V (L)
A	293	1,95	12,5
B	293	0,487	50,0
C	$1,17\ 10^3$	1,95	50,0

A : $P_A = \dfrac{nRT_A}{V_A} = 1,95$ bar

B : $P_B = \dfrac{nRT_B}{V_B} = 0,487$ bar

C : BC isochore $\Rightarrow V_C = V_B = 50,0$ L

CA isobare $\Rightarrow P_C = P_A = 1,95$ bar

$T_C = \dfrac{P_C V_C}{nR} = 1,17\ 10^3$ K

15. Transformation AB : $W_{AB} = -nRT_A \ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right) = \boxed{-3,38 \text{ kJ} = W_{AB}}$

$\Delta U_{AB} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = 0$

donc $Q_{AB} = -W_{AB} = \boxed{+3,38 \text{ kJ} = Q_{AB}}$

Transformation BC : $\boxed{W_{BC} = 0}$

$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) = \boxed{18,2 \text{ kJ} = Q_{BC}}$

Transformation CA : $W_{CA} = -p_A (V_A - V_C) = \boxed{7,31 \text{ kJ} = W_{CA}}$

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}(T_A - T_C) = \boxed{-25,5 \text{ kJ} = Q_{CA}}$$

16. $W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = \underline{3,93 \text{ kJ}}$

$Q_{cycle} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = \underline{-3,92 \text{ kJ}}$

$W_{cycle} > 0$ donc le cycle est <u>récepteur</u> (cohérent avec le sens trigonométrique du cycle)

17. $\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$

↳ aux erreurs d'arrondis près

ΔU est la variation d'une fonction d'état qui ne dépend donc pas du chemin suivi ⇒ pour un cycle, on a toujours $\Delta U_{cycle} = 0$

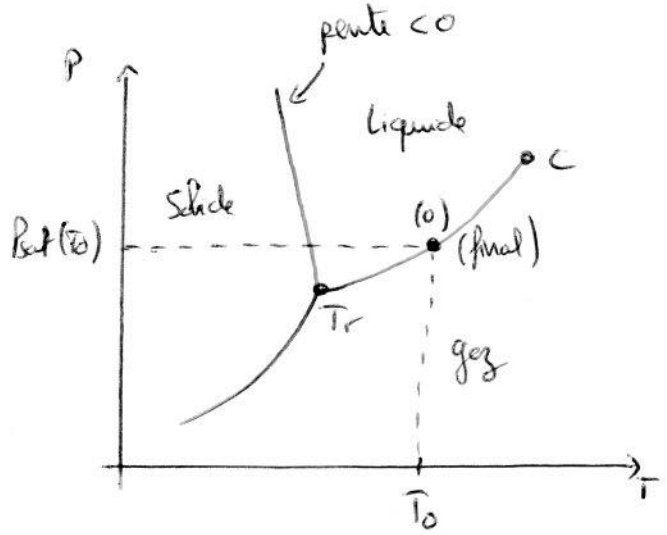
Détente isotherme d'un mélange de deux corps purs

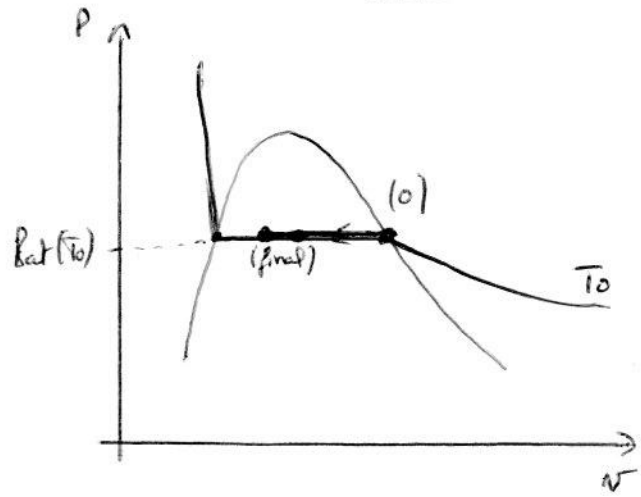
I. Corps pur eau (sans N_2)

1. $P_{E,0} = P_{sat}(T_0)$ d'après l'énoncé donc $\underline{P_{E,0} = 2{,}00\ 10^4\ Pa}$

2. $P_{E,0} V_0 = n_E R T_0 \iff V_0 = \dfrac{n_E R T_0}{P_{E,0}}$ AN : $\underline{V_0 = 4{,}15\ 10^{-2}\ m^3}$
$= \underline{41{,}5\ L}$

3.





4. À l'état final, on a : $V_{final} = x_{final} V_0 + (1 - x_{final}) V_L$
↳ volume du système s'il est liquide

$\iff x_{final} = \dfrac{V_{final} - V_L}{V_0 - V_L}$

Or, d'après l'énoncé : V_L est négligé

Donc $x_{final} = \dfrac{V_{final}}{V_0} \iff \boxed{x_{final} = \dfrac{1}{2}}$

On a $W = \displaystyle\int_0^{final} -\underset{P_{ext}}{\underset{\shortparallel}{P_{sat}(T_0)}}\, dV \iff W = -P_{sat}(T_0)\,(V_{final} - V_0)$

$\iff \boxed{W = \dfrac{P_{sat}(T_0) V_0}{2}}$ AN : $\underline{W = 415\ J}$

II. Transformation d'un mélange diazote - eau

5. Hypothèse : la vapeur d'eau est sèche.

Alors la pression partielle de l'eau est $P_{eau,1} = x^{mol}_{eau,1} P_{tot,1}$

$= \dfrac{n_E}{n_E + n_N} P_{tot,1} = 2{,}25\ 10^4\ Pa$

$P_{eau,1} > P_{sat}(T_0)$ ce qui est incohérent avec l'hypothèse $\Rightarrow$ l'eau est sous forme de vapeur saturante

6- $\boxed{P_{N_2,1} = P_{tot,1} - P_{sat}(T_0)}$

AN : $P_{N_2,1} = 1{,}00\,10^6$ Pa

7- On a $P_{N_2,1} V_1 = n_N R T_0 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = \frac{n_N R T_0}{P_{N_2,1}}}$ AN : $V_1 = 2{,}77\,10^{-2}\ m^3$
$= 27{,}7$ L

8- On a $P_{eau,1} V_1 = n_{E,vap,1} R T_0 \Leftrightarrow \boxed{n_{E,vap,1} = \frac{P_{eau,1} V_1}{R T_0}}$

AN : $n_{E,vap,1} = 2{,}00\,10^{-1}$ mol

Puis $\boxed{n_{E,liq,1} = n_E - n_{E,vap,1}}$ AN : $n_{E,liq,1} = 1{,}00\,10^{-1}$ mol

9- On a $P_{tot,2} = 2{,}00\,10^6$ Pa $= P_{sat}(T_0)$

or $P_{tot,2} = P_{N_2,2} + P_{eau,2}$ donc $P_{eau,2} < P_{sat}(T_0)$: la vapeur d'eau est sèche

10- $P_{N_2,2} = x_{N_2}^{mol} P_{tot,2}$

$\Leftrightarrow \boxed{P_{N_2,2} = \frac{n_N}{n_N + n_E} P_{tot,2}}$ AN : $P_{N_2,2} = 5{,}00\,10^5$ Pa

11- $P_{tot,2} V_2 = n_{tot} R T_0$

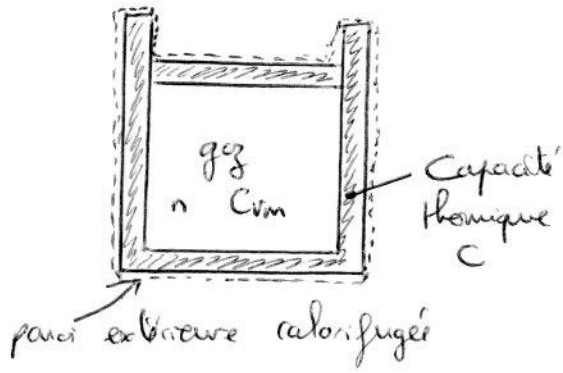
$\Leftrightarrow \boxed{V_2 = \frac{n_{tot} R T_0}{P_{tot,2}}}$ AN : $V_2 = 5{,}53\,10^{-2}\ m^3$
$= 55{,}3$ L

12- La vapeur d'eau est sèche donc $n_{E,vap,2} = n_E = 3{,}00\,10^{-1}$ mol

$n_{E,liq,2} = 0$

Transformation polytropique

1.a) $\Sigma = \{ \underbrace{\text{gaz}}_{C_V = nC_{Vm}} + \underbrace{\text{piston} + \text{cylindre}}_{C} \}$



lors d'une transformation infinitésimale :

$dU = \delta W + \delta Q$

avec $\delta W = -p_{ext}\, dV = -p dV$

$\delta Q = 0$ car parois extérieures calorifugées

$dU = dU_{gaz} + dU_{piston+cylindre} = n C_{Vm} dT + C dT$

← extensivité de U

D'où $(n C_{Vm} + C)\, dT = -p dV$

$$\Leftrightarrow \boxed{(n C_{Vm} + C)\, dT + p dV = 0}$$

1.b) A l'état final : $(p+dp)(V+dV) = nR(T+dT)$

$\Leftrightarrow \cancel{pV} + pdV + Vdp = \cancel{nRT} + nR\,dT$ à l'ordre 1

$$\Leftrightarrow \boxed{pdV + Vdp = nR\,dT}$$

1.c) On a $dT = \frac{p}{nR} dV + \frac{V}{nR} dp$ donc :

$$\left[(n C_{Vm} + C)\left(\frac{p}{nR} dV + \frac{V}{nR} dp \right) + p dV = 0 \right] \times \frac{1}{pV} \times nR$$

$$\Leftrightarrow (n C_{Vm} + C)\left(\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \right) + nR \frac{dV}{dV} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(n C_{Vm} + nR}_{= n C_{pm}} + C)\, \frac{dV}{V} + (n C_{Vm} + C)\, \frac{dp}{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \frac{n C_{pm} + C}{n C_{Vm} + C}}$$

On a $n C_{pm} = C_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}$ et $n C_{Vm} = C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ donc $\boxed{k = \frac{\frac{\gamma n R}{\gamma - 1} + C}{\frac{nR}{\gamma - 1} + C}}$

2- On intègre la relation précédente :

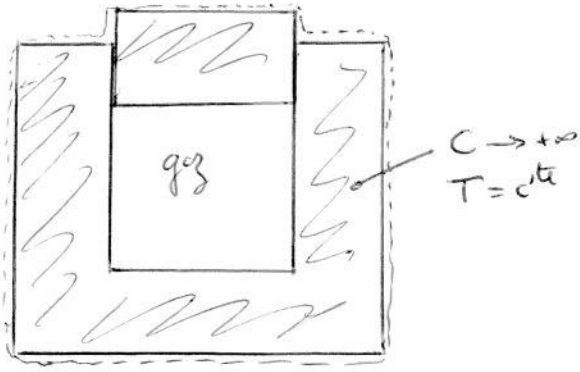
$$k\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} + \int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{V_2^{\,k}}{V_1^{\,k}}\right) + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{P_2 V_2^{\,k}}{P_1 V_1^{\,k}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P_2 V_2^{\,k} = P_1 V_1^{\,k}}$$

3- $C \to +\infty$:



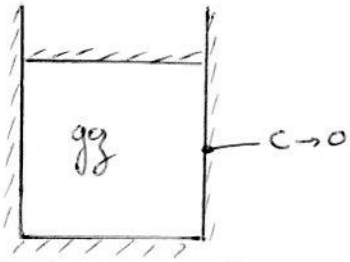
Le gaz subit une <u>transformation isotherme</u> (contact avec un thermostat) et <u>monotherme</u>

On a alors : $\boxed{k = \frac{C_v + C}{C_p + C} \to \frac{C}{C} = 1}$

donc $\boxed{p_1 V_1 = p_2 V_2}$ Cohérent avec une transformation isotherme :

$T = cte \Leftrightarrow nRT = cte \Leftrightarrow \underline{pV = cte}$

4- $C \to 0$:



Le gaz subit une transformation <u>adiabatique</u>.

On a alors : $\boxed{k = \frac{\frac{\gamma nR}{\gamma-1} + C}{\frac{nR}{\gamma-1} + C} = \frac{\frac{\gamma \cancel{nR}}{\cancel{\gamma-1}}}{\frac{\cancel{nR}}{\cancel{\gamma-1}}} = \gamma}$

donc $\boxed{p_1 V_1^{\,\gamma} = p_2 V_2^{\,\gamma}}$

5 a) b) On a $p_1 V_1^{\ell} = p_2 V_2^{\ell}$ avec $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}$ et $V_2 = \frac{nRT_2}{p_2}$

donc $p_1 \frac{(nR)^{\ell} T_1^{\ell}}{p_1^{\ell}} = p_2 \frac{(nR)^{\ell} T_2^{\ell}}{p_2^{\ell}}$

$\Leftrightarrow p_1^{1-\ell} T_1^{\ell} = p_2^{1-\ell} T_2^{\ell}$

$\Leftrightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\ell}{\ell}}}$

AN : $T_2 = 6{,}98\ K$

$V_1 = 24{,}3\ L$

$V_2 = 4{,}14\ L$

5 c) $W = -\int_1^2 p_{ext}\, dV = -\int_1^2 p\, dV$ avec $p V^{\ell} = p_1 V_1^{\ell}$

$\Leftrightarrow W = -p_1 V_1^{\ell} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\ell}}$

$\Leftrightarrow W = -p_1 V_1^{\ell} \left[\frac{V^{-\ell+1}}{-\ell+1}\right]_{V_1}^{V_2}$ (pour $\ell \neq 1$)

$\Leftrightarrow W = -p_1 V_1^{\ell} \cdot \frac{V_2^{1-\ell} - V_1^{1-\ell}}{1-\ell}$

$\Leftrightarrow W = \frac{p_1 V_1 - p_1 V_1^{\ell} V_2^{1-\ell}}{1-\ell}$ avec $p_1 V_1^{\ell} V_2^{1-\ell} = p_2 V_2^{\ell} V_2^{1-\ell} = p_2 V_2$

$\Leftrightarrow \boxed{W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\ell - 1}}$ AN : $W = 5{,}70\ kJ$ (>0 : cohérent avec $V_2 < V_1$)

5 d) 1er principe : $Q = \Delta U - W \Leftrightarrow Q = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) - \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\ell - 1}$

$\Leftrightarrow \boxed{Q = (p_2 V_2 - p_1 V_1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\ell - 1}\right)}$

AN : $Q = -1{,}43\ kJ$

5 e) $C \to O$: $\ell = \gamma$ et transformation adiabatique. Ici, on a $Q = 0 \Rightarrow$ cohérent